# MT-04

## June - Examination 2016

## B.A. / B.Sc. Pt. II Examination

## Real Analysis & Matric Space

## Paper - MT-04

**Time : 3 Hours ]** **[ Max. Marks :- 67**

**Note:** The question paper is divided into three sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

**निर्देश :** प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं।

**Section - A** **$7 \times 1 = 7$**

(Very Short Answer Questions)

**Note:** Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt **all** questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

**खण्ड – 'अ'**

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'अ' में 07 अति लघु उत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना हैं। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) State Balzano - Weierstrass theorem.
बाल्जनो वाइस्ट्रास प्रमेय का कथन कीजिए।

(ii) What is the supremum of the set
$S = \{ x \mid x \in I, x^2 < 16 \}$
समुच्चय $S = \{ x \mid x \in I, x^2 < 16 \}$ का उच्चक बताइये।

(iii) Define limit point of a sequence.
अनुक्रम के सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

(iv) State Mostest theorem.
मॉस्टेस्ट प्रमेय का कथन कीजिए।

(v) Write the statement of fundamental theorem of integral calculus.
समाफलन गणित की मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिए।

(vi) State Darboux theorem.
डार्बू प्रमेय का कथन कीजिए।

(vii) Define the Pseudo Metric.
छद्म–दूरीक को परिभाषित कीजिए।

## Section - B $\quad 4 \times 8 = 32$

(Short Answer Questions)

**Note:** Section ‘B’ contain Eight (08) Short Answer Type Questions. Examinees have to answer **any four** (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

## (खण्ड – ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'ब' में 08 लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्ही भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

2) Show that there are infinite rational numbers between any two different real numbers.

सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याए विद्यमान होती है।

3) Prove that the sequence $\left\{\dfrac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right\}$ converge to 2.

सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम $\left\{\dfrac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right\}$ को अभिसृत होती है?

4) Prove that the following function is continuous at origin

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;\ (x, y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x, y)=(0,0)\end{cases}$$

सिद्ध किजिए कि निम्न फलन मूल बिन्दू पर संतत् है।

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;\ (x, y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x, y)=(0,0)\end{cases}$$

5) Test the following function for differentiability at $x=1$ and $x=2$ $f(x)=|x-1|+|x-2|, \forall\, x\in[0,3]$

निम्न फलन की $x=1$ व $x=2$ पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

$f(x)=|x-1|+|x-2|, \forall\, x\in[0,3]$

6) Suppose $f$ is any bounded real function in the close interval $[a, b]$, and $m$ and M are infimum and supremum respectively, of $f$ in $[a, b]$. Then show that for every partition $p \in p[a, b]$
$m(b-a) \leqslant L(p, f) \leqslant U(p, f) \leqslant M(b-a)$

माना $f$, संवृत अन्तराल $[a, b]$, में परिबद्ध वास्तविक फलन है तथा $m$ एवं M, फलन $f$ के $[a, b]$. में क्रमशः निम्नक एवं उच्चक है! तब सभी विभाजनों $p \in p[a, b]$ के लिए सिद्ध कीजिए।

$m(b-a) \leqslant L(p, f) \leqslant U(p, f) \leqslant M(b-a)$

7) Using second mean value theorem, prove that

$$\frac{\pi^3}{15} < \int_0^{\pi} \frac{x^2}{3+2\cos x}\,dx < \frac{\pi^3}{3}$$

द्वितीय मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हुए प्रदर्शित कीजिए। कि

$$\frac{\pi^3}{15} < \int_0^{\pi} \frac{x^2}{3+2\cos x}\,dx < \frac{\pi^3}{3}$$

8) Show that

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$$

सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$$

9) Prove that every finite subset of metric space is compact.

सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संहत होता है।

## Section - C $\qquad 2 \times 14 = 28$

(Long Answer Questions)

**Note:** Section 'C' contain 04 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer **any two** (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

## (खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'स' में 04 निबंधात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्ही भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का हैं। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

10) If sequence $\{x_n\}$ coverage to $l$, then show that the sequence $\{a_n\}$ also coverage to $l$, where

$$a_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} \;\forall\, n \in \mathrm{N}$$

यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ को अभिसृत हो तो, सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{a_n\}$ भी $l$ को अभिसृत होगा, जहाँ

$$a_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} \;\forall\, n \in \mathrm{N}$$

11) State and prove the necessary and sufficient conditions for Riemann integrability.

रीमान समाकलनीयता के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्धों का कथन कर सिद्ध कीजिए।

12) (i) Let X be a set of all real valued functions defined on [0, 1] and $d : X \times X \rightarrow R$ is defined as

$$d(f, g) = \int_0^1 | f(x) - g(x) | \, dx, \ \forall \ f, g \in X.$$

Given integral is Rimann integral, then show that $d$ is metric on X.

माना X संवृत अन्तराल [0, 1] पर परिभाषित सभी संतत् वास्तविक मान फलनों का समुच्चय है व $d : X \times X \rightarrow R$ निम्न प्रकार परिभाषित है।

$$d(f, g) = \int_0^1 | f(x) - g(x) | \, dx, \ \forall \ f, g \in X.$$

समाहित समाकलन रीमान समाकलन है, तो प्रदर्शित करो कि $d$, X पर दूरीक है।

(ii) Find the open sphere $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, and closed sphere $\overline{S}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ for the metric $d(x, y) = |x - y|$ defined on set $X = [0, 1]$

समुच्चय $X = [0, 1]$, में सामान्य दूरीक $d(x, y) = |x - y|$ के लिए $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ तथा $\overline{S}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ज्ञात कीजिए।

13) (i) Prove that in metric space every cauchy sequence is bounded.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समाष्टि में प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध होता है?

(ii) State and prove Heine Borel theorem.

हेने बोरेल प्रमेय का कथन देकर सिद्ध कीजिए।